ACADEMIA ROMÂNĂ
SCOSAAR

HABILITATION THESIS

(Counter)examples in Several Complex Variables

Cezar Joiţa

REZUMAT

Domeniul fundamental: Matematică şi ştiinţe ale naturii

Domeniul de abilitare: Matematică

Teză elaborată în vederea obţinerii atestatului de abilitare în scopul conducerii lucrărilor de doctorat în domeniul Matematică

BUCUREŞTI, 2017

În această teză de abilitare am colectat mai multe exemple pe care le-am obţinut împreună cu colaboratorii mei în perioada scursă de la obţinerea doctoratului. Toate sunt contraexemple la întrebări specifice şi toate fac parte din domeniul analizei complexe de mai multe variabile. Am decis să includ doar demonstraţiile care sunt strict legate de aceste exemple. Cu alte cuvinte, teza nu conţine demonstraţia acelor rezultate care pot fi “de interes independent”. Pentru demonstraţia acestora din urmă am trimis la articolele în care au apărut.

În Capitolul 1 am colectat o listă scurtă de definiţii si rezultate care vor fi folosite pe parcursul întregii teze. Partea principală este Capitolul 2 care conţine rezultatele originale ale tezei. Conform ghidului orientativ pentru redactarea tezei de abilitare redactat de Ministerul Educaţiei din România, această teză trebuie să conţină planuri şi direcţii de dezvoltare a carierei. Am crezut că este oportun ca în ultimul capitol al tezei să includ o scurtă listă de probleme deschise. Toate sunt dificile iar majoritatea sunt foarte dificile. Le-am inclus aici nu pentru că intenţionez să le rezolv (nu că nu aş vrea) ci pentru că am convingerea că este întotdeauna util să avem în vedere probleme dificile din domeniul nostru de cercetare, probleme la care să ne raportăm.

Dăm mai jos o scurtă descriere a Capitolului 2. Rezultatele celor opt secţiuni ale acestui capitol sunt prezentate în ordinea cronologică în care au fost obţinute. Motivaţia pentru construirea fiecărui exemplu este dată în secţiunea respectivă.

Secţiunea 2.1 Dăm exemple care arată că cea de a treia formulă integrală Cauchy-Fantapiè a lui Leray nu este adevărată în forma enunţată de Jean Leray în articolul său din 1959 “Problème de Cauchy III” şi că trebuie impuse condiţii suplimentare. Acest exemplu a fost obţinut într-o lucrare scrisă împreună cu Finnur Larusson care a apărut în Mich. Math. J. în 2003.

Seţiunea 2.2. Dăm un exemplu de un domeniu Stein contractibil $D \subset \mathbb{C}^2$ cu frontieră netedă real analitică astfel încat intersecţia lui D cu orice dreaptă complexă $l \subset \mathbb{C}^2$ este Runge în l dar D nu este Runge în $\mathbb{C}^2$, răspunzând astfel unei întrebări pusă de Bremermann. Acest exemplu a fost dat într-un articol din Math. Ann. 2007.

Secţiunea 2.3. Pentru suprafeţe Riemann, Raghavan Narasimhan a demonstrat următorul rezultat: dacă $\{D_n\}_{n\geq 1}$ este un şir local finit de submulţimi deschise, două câte două disjuncte, într-o suprafaţă Riemann deschisă, $\mathcal{R}$, astfel încât $\cup D_n$ este Runge în $\mathcal{R}$ atunci pentru orice şir de funcţii olomorfe $f_n \in \mathcal{O}(D_n)$, orice şir de mulţimi compacte $K_n \subset D_n$ şi orice şir de numere pozitive $\epsilon_n > 0$ există $f \in \mathcal{O}(\mathcal{R})$ astfel încât $\|f - f_n\|_{K_n} < \epsilon_n$ pentru orice n.

Dăm exemple care arată că un rezultat similar nu are loc în dimensiuni mai mari. Aceste exemple au fost date într-un articol din J. Math. Kyoto Univ. 2007.

Secţiunea 2.4. Construim o varietate complexă 1-convexă X de dimensiune 2 astfel încât acoperirea sa universală $\tilde{X}$ are următoarele proprietăţi:
a) $\tilde{X}$ nu satisface proprietatea discretă a discului,
b) $H^1(\tilde{X}, \mathcal{O})$ nu este separat.

Rezultatele din această secţiune au apărut în două articole scrise în colaborare cu Mihnea Colţoiu şi care au fost publicate în Math Z. în 2013 şi Adv. Math. în 2014.

Secţiunea 2.5. Dăm exemple de spaţii complexe X astfel încât funcţiile olomorfe global definite pe X separă punctele şi dau coordonate locale dar X nu este biolomorf cu o submulţime deschisă dintr-un spaţiu Stein. Aceste exemple au fost obţinute într-o lucrare scrisă împreună cu Mihnea Colţoiu care a apărut în Math. Ann. în 2013.

Secţiunea 2.6. Construim un şir $\{D_\nu\}$ de submulţimi deschise 3-complete din $\mathbb{C}^5$ astfel încât $D_{\nu+1} \subset D_\nu$ pentru orice ν şi interiorul intersecţiei lor $\operatorname{Int}(\bigcap D_\nu)$ nu este coomologic 3-complet.

Pentru orice număr întreg $q \geq 2$, construim un spaţiu complex Stein, normal, X având singularităţi izolate şi $\{D_\nu\}$ un şir descrescător de submulţimi deschise din X astfel încât fiecare D_ν este 2-complet şi $\operatorname{Int}(\bigcap D_\nu)$ nu este q-complet cu colţuri.

Aceste exemple au fost obţinute într-o lucrare scrisă împreună cu Mihnea Colţoiu care a apărut în Publ. Res. Inst. Math. Sci. în 2017.

Seçtiunea 2.7. Dăm un exemplu de aplicaţie polinomială $F : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ şi o valoare regulată $y_0 \in \mathbb{C}^2$ a lui F astfel încât pentru y dintr-o vecinătate a lui y_0 fibra $F^{-1}(y)$ este homeomorfă cu $F^{-1}(y_0)$ şi F nu este o fibrare trivială C^∞ pe o vecinătate a lui y_0. Acest exemplu a fost obţinut într-un preprint scris împreună cu Mihai Tibăr.

Secţiunea 2.8. Dăm un exemplu de domeniu $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ care este biolomorf cu o bilă şi astfel încât pentru orice domeniu Stein $U \subset \mathbb{C}^n$ conţinând $\overline{\Omega}$ avem că Ω nu este Runge în U. Acest exemplu a fost obţinut într-un preprint scris împreună cu Hervé Gaussier.