Teză de Abilitare

Teoria Algebrică, Geometrică şi Spectrală a Relaţiilor Liniare

REZUMAT

Domeniul fundamental: Matematică şi ştiinţe ale naturii

Domeniul de abilitare: Matematică

Teză elaborată in vederea obţinerii atestatului de abilitare in scopul conducerii lucrărilor de doctorat in domeniul Matematică

Valerică Adrian Sandovici

Bucureşti, 2018

Rezumat

Operatorii liniari definiţi pe spaţii finit sau infinit dimensionale au aplicaţii remarcabile in diverse teorii clasice sau moderne precum mecanica cuantică sau teoria ecuaţiilor diferenţiabile. Există anumite situaţii in care operatorul care stă la baza modelării unui fenomen fizic sau de altă natură să nu fie dens definit sau, mai mult, să fie multivaluat. In acest caz teoria relaţiilor liniare (a operatorilor multivaluaţi) intră pe deplin in joc. Mai mult, relaţiile anti–adjuncte nu sunt altceva decat structuri Dirac. Acestea oferă un cadru teoretic pentru modelarea matematica a sistemelor fizice inginereşti. Atat relaţiile liniare autoadjuncte cat şi structurile Dirac pot fi definite pe spaţii Hilbert atat reale cat şi complexe. Trebuie menţionat faptul că există diferenţe procedurale in tratarea relaţiilor liniare pe spaţii Hilbert reale sau spaţii Hilbert complexe. In plus structurile Dirac au o aplicabilitate specială atunci cand sunt definite pe spaţii Hilbert reale.

Această teză conţine rezultate referitoare la relaţiile liniare definite pe spaţii liniare şi pe spaţii Hilbert. Sunt punctate de asemenea şi anumite aplicaţii ale teoriilor dezvoltate. Conţinutul lucrării se doreşte a fi un tot unitar. Cu toate acestea in fiecare capitol se rezolvă cate o problemă specifică. Din acest motiv fiecare capitol se poate citi in mod independent. In continuare vom descrie pe scurt conţinuturile capitolelor in ordinea in care acestea apar.

In Capitolul 1 este studiată şi complet determinată structura unei relaţii liniare definită pe spaţii Euclidiene. Se arată că orice relaţie liniară pe astfel de spaţii se poate scrie ca o sumă directă de trei relaţii liniare aparţinand, fiecare dintre ele, cate unei clase speciale: clasa relaţiilor Jordan, clasa relaţiilor complet singulare şi clasa multişifturilor. Toate aceste clase speciale sunt caracterizate in termeni spectrali. O generalizare a clasicei forme Jordan este de asemeni obţinută.

Pentru o relaţie liniară definită pe un spaţiu liniar sunt definite concepte de natură algebrică: ascendent, descendent, nulitate şi defect. Acestea sunt introduse şi studiate in Capitolul 2. Se arată apoi că anumite rezultate datorate lui A.E. Taylor şi lui M.A. Kaashoek cu privire la relaţiile care se pot stabili intre aceste concepte algebrice rāman valabile in contextul relaţiilor liniare, uneori fiind nevoie de anumite restricţii suplimentare cu privire la natura lanţurilor singulare asociate. Printre altele se arată că pentru o relaţie liniară A definită pe un spaţiu liniar $\mathfrak{H}$, care are varietatea lanţurilor singulare trivială şi pentru care ascentul p este finit

iar nulitatea şi defectul sunt egale şi finite atunci spaţiul liniar $\mathfrak{H}$ se poate scrie ca o suma directă dintre ker A^p şi ran A^p. In plus se arată prin exemple cum numeroase rezultate cunoscute pentru operatori liniari pentru care relaţia liniară considerată admite lanţuri singulare netriviale nu mai răman valabile in acest context.

Fie $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ si $\mathfrak{Z}$ trei spaţii liniare şi fie A şi respectiv B două relaţii liniare definite de la $\mathfrak{X}$ la $\mathfrak{Y}$ şi respectiv de la $\mathfrak{Y}$ la $\mathfrak{Z}$. Rezultatul principal al Capitolului 3 este o formulă care leagă nulităţile şi defectele relaţiilor A şi B cu acelea ale produsului lor BA.

Comportamentul domeniului, imaginii, nucleului şi a părţii multivaluate a unei relaţii liniare definită pe un spaţiu liniar este analizată in Capitolul 4.

Presupunem că A şi B sunt doua relaţii liniare definite pe anumite spaţii liniare. Principalul obiectiv al Capitolului 5 este prezentarea a două caracterizări pentru existenţa a doi operatori T şi T' astfel incat $A = BT$ şi respectiv $A = T'B$. Aceste factorizări extind şi completează anumite rezultate similare cunoscute datorate lui R.G. Douglas, lui Z. Sebestyén şi lui D Popovici.

Relaţiile liniare de grad $d \in \mathbb{N}$ pe spaţii Hilbert fac obiectul de studiu al Capitolului 6. Acestea sunt complet caracterizate in termenii unei descompuneri de tip algebric avand una dintre componente o relaţie quasi-Fredholm de grad 0 şi o altă parte dată de un operator nilpotent de grad d. Se arată că adjuncta unei relaţii liniare de grad $d \in \mathbb{N}$ este tot o relaţie quasi-Fredholm de grad d. Asa numitele relaţii semi–Fredholm sunt cazuri particulare de relaţii quasi-Fredholm. De asemeni rezultate cunoscute pentru operatori quasi–Fredholm şi operatori semi–Fredholm sunt extinse la cazul relaţiilor liniare corespunzătoare.

Pentru o relaţie liniară A intr-un spaţiu Hilbert $\mathfrak{H}$ noţiuni ca mulţime rezolventă şi mulţime de puncte de tip regulat sunt extinse la noţiunea de mulţime a punctelor regulate in Capitolul 7. Astfel de puncte regulate sund definite in termeni de relaţii quasi–Fredholm de grad 0. Se arată că mulţimea punctelor regulate este inchisă şi pentru $\lambda \in \mathbb{C}$ aparţinand acestei mulţimi spaţiile ker $(A - \lambda)$ şi ran $(A - \lambda)$ sunt continue in metrica "gap".

O anumită transformare cuaternionică Cayley pentru relaţii liniare este definită şi studiată in Capitolul 8. Se scoate in evidenţă rolul pe care il au relaţiile liniare pentru care transformările quaternionice Cayley corespunzătoare sunt operatori normali. Legatura cu extensiile normale ale relaţiilor liniare subnormale este in detaliu studiată.

In Capitolul 9 se prezintă liniile directoare care descriu proiectele mele ştiinţifice prezente şi de viitor apropiat precum şi proiectele care descriu cariera privind activitatea de predare. Pe scurt, voi continua să lucrez in domeniul teoriei extinderilor relaţiilor liniare in spaţii cu produs scalar, in teoria structurilor Dirac şi aplicaţiilor imediate in mecanică. Sunt de asemeni interesat in continuarea cercetării anumitor capitole de geometrie diferenţială cu aplicaţii directe in teoria fracturii materialelor. Intenţionez sa elaborez doua monografii: una dintre ele va conţine contribuţiile personale in teoria relaţiilor liniare pe spaţii liniare iar a doua va conţine rezultate proprii in ceea ce priveşte structurile Dirac pe spaţii infinit dimensionale. Aş dori de asemeni să elaborez un manual universitar care să conţină capitolele de matematică necesare studenţilor in domeniul ştiinţelor inginereşti.