



ACADEMIA ROMÂNĂ

SCOSAAR

TEZĂ DE ABILITARE

CONTROL OPTIMAL, METODE VARIATIONALE ȘI ASIMPTOTICE
PENTRU STUDIUL UNOR PROBLEME DIN LUMEA REALĂ

REZUMAT

Domeniul fundamental: MATEMATICĂ ȘI ȘTIINȚE ALE NATURII

Domeniul de abilitare: MATEMATICĂ

Autor: Cercetător științific I dr. RUXANDRA MARINA STAVRE

Teză elaborată în vederea obținerii atestatului de abilitare în scopul conducerii lucrărilor
de doctorat în domeniul MATEMATICĂ.

BUCUREȘTI, 2018

REZUMAT. Această lucrare prezintă principalele rezultate științifice pe care le-am obținut după susținerea tezei de doctorat în domeniul: modelare matematică și aplicarea metodelor variaționale, asimptotice și de control optimal în studiul teoretic al unor probleme concrete din medicină, biologie, științe inginerești. Lista cu referințe bibliografice conține titlurile a 50 de lucrări pe care le-am scris, fie ca unic autor, fie în colaborare. Dintre acestea, 5 au fost publicate înainte de susținerea tezei de doctorat, 42 după susținerea tezei și 3 sunt în curs de publicare.

Pentru a pune în evidență continuitatea activității mele de cercetare prin prisma tematicii abordate, voi începe prezentarea cu o scurtă trecere în revistă a rezultatelor publicate înainte de susținerea tezei de doctorat, [62]-[66]. Primele rezultate ale activității mele științifice sunt legate de studiul unor probleme cu frontieră liberă. Problemele cu frontieră liberă prezintă un grad sporit de dificultate deoarece la necunoscutele caracteristice problemei se mai adaugă ca necunoscută suplimentară domeniul de mișcare, a cărui frontieră este parțial necunoscută, frontiera liberă fiind o frontieră necunoscută. O problemă importantă de acest tip este problema cunoscută în literatura de specialitate sub numele de "problema barajului". La începutul anilor '70, în articolul [8], se propune o metodă modernă (la acea dată) de studiu al problemei barajului, metodă bazată pe folosirea inegalităților variaționale aflate la momentul respectiv în perioada de pionierat. Ideea propusă în articolul citat anterior se bucură de un mare succes, dovadă fiind numărul important de lucrări cu tematică similară care îi urmează. Dintre acestea am selectat câteva pe care le considerăm mai importante: [4], [9], [14], [17], [28]. În anul 1985 am obținut primele rezultate științifice semnificative legate de problema barajului în lucrarea [64]. Această lucrare s-a bucurat de un număr mare de citări, dintre care menționăm articolul [38] avându-l ca autor pe Prof. A. Friedman, care a publicat sute de articole în domeniul problemelor cu frontieră liberă. După aproape 30 de ani de la publicare, articolul [64] este încă citat (vezi, de ex., [30], [45]).

Teza propusă pentru obținerea atestatului de abilitare conține 4 capitole și o listă cu referințe bibliografice. Capitolele 1, 2, 3 prezintă rezultatele cele mai importante pe care le-am obținut și publicat după susținerea tezei de doctorat, clasificate după tematică. Ultimul capitol conține o prezentare succintă a intențiilor mele de cercetare în viitorul apropiat. Teza se încheie cu o listă bibliografică conținând 140 de lucrări, dintre care 50 reprezintă

rezultatele pe care le-am obținut fie ca unic autor fie în colaborare.

Capitolul 1 este dedicat studiului unor probleme cu frontieră liberă. El reprezintă o continuare a tematicii abordate în teza de doctorat. Rezultatele prezentate în acest capitol au fost publicate în lucrările [67], [68], [69]. Dacă anterior am vorbit despre o problemă cu frontieră liberă foarte la modă în anii '70-'80 și anume "problema barajului", în lucrările [67]-[69] se introduce un alt model de problemă cu frontieră liberă: mișcarea unui jet de fluid în prezența unui perete poros. Problema introdusă în articolul [67] este o problemă nouă, diferită de cele studiate până atunci în literatura de specialitate, care abordau mișcarea unui jet de fluid liber, fie cu metode clasice de tipul metodei hodografice (vezi, de ex., [15], [37], [39]), fie cu metode variaționale ([5], [6]). Am studiat mișcarea unui jet de fluid care pătrunde printr-un perete poros, transformând problema într-o problemă de minim. Am obținut rezultate de existență, unicitate și monotonie a soluției. Ideea cea mai interesantă a articolului este că reușim să demonstrăm proprietăți ale domeniului de mișcare necunoscut cu ajutorul alegerii convenabile a funcțiilor test în problema de minim. Mai precis, proprietăți care țin de intuiția fizică sunt demonstrate riguros cu argumente strict matematice. În articolele [68] și [69] se generalizează rezultatele din [67] pentru cazurile unui jet format de două fluide imiscibile și, respectiv, a impactului dintre un jet de fluid și un perete poros în prezența câmpului gravitațional.

Capitolul al 2-lea abordează probleme de control optimal asociate în marea lor majoritate unor modele provenind din lumea reală. Este foarte dificilă selecția unor exemple din bogata literatură a controlului optimal. Vom menționa mai întâi câteva lucrări generale din teoria controlului optimal: [42], [29], [43], [47], [11]. Deoarece ne-am ocupat de modele de control optimal construite ca aplicații directe ale unor probleme fizice concrete, vom da câteva exemple de articole cu tematică similară: [1], [12], [13], [10], [7], [46].

Rezultatele pe care le-am obținut în legătură cu acest subiect au fost publicate în 15 articole și un capitol de carte: [22]-[26], [70]-[74], [18], [20], [78]-[80] și [75]. În articolele [23] și [24] se studiază din punct de vedere teoretic și, respectiv, numeric o problemă de control frontieră asociată cu ecuațiile Navier-Stokes staționare cuplate cu ecuația căldurii, considerând pentru temperatură o condiție la limită generală de tip Robin. Problema de control constă în determinarea temperaturii exterioare care conduce la o configurație dorită a temperaturii în fluid. În [23] se demonstrează existența unui control optimal și se obțin

condițiile necesare de optimalitate prin introducerea unei familii de probleme de control regularizate. În lucrarea [24], cu ajutorul unei metode de element finit se discretizează sistemul optimal cu scopul de a determina numeric un control optimal și se demonstrează convergența algoritmilor propuși.

Problema studiată în [25] are aplicații directe în biologie. Pornind de la modelul mișcării biconvective prezentat în articolul [41], introducem și studiem în [25] o problemă de control optimal legată de curgerea biconvectivă. Stabilim un rezultat de existență și unicitate pentru mișcarea biconvectivă staționară. Metoda pe care o folosim ne permite să obținem rezultatul de existență a soluției cu presupuneri mai puțin restrictive decât în [40]. În plus, se studiază o problemă de control care are ca scop optimizarea concentrației de microorganisme din fluidul de cultură. Acest articol a fost citat de 43 de ori (conform Google Scholar); dintre aceste citări menționăm: [2], [3], [61].

O altă lucrare inspirată direct dintr-o problemă fizică concretă este [26]; în această lucrare se studiază din punct de vedere teoretic și numeric o problemă de control optimal în teoria propagării căldurii, problemă care reprezintă modelul matematic corespunzător situației în care o cantitate care ne interesează din punct de vedere fizic, dar care nu este direct accesibilă măsurătorii, este estimată pe baza măsurătorii altor cantități. Acest articol a fost citat în lucrări cu caracter aplicativ, printre care menționăm: [16], [60].

În [72] se studiază o altă problemă de control optimal asociată sistemului cuplat neliniar format din ecuația Navier-Stokes și ecuația căldurii. Alegerea funcționalei cost conduce la obținerea unui sistem adjunct care nu este cu divergență nulă. Pentru a depăși această dificultate, se propune o construcție bazată pe introducerea mai multor funcții convenabil alese.

Lucrările [73], [74] prezintă probleme de control optimal asociate mișcării fluidelor micropolare. Teoria fluidelor micropolare introdusă în [35] permite studierea anumitor fenomene fizice care nu pot fi descrise de ecuațiile Navier-Stokes clasice.

În articolele [78], [80] se propune un model matematic pentru optimizarea curgerii sângelui în insuficiența venoasă. Când o venă a membrilor inferioare își pierde elasticitatea, apar fenomene ca stagnarea sau refluxul sângelui, care conduc la complicații medicale. Propunem un model matematic în scopul diminuării efectelor negative determinate de insuficiența venoasă. Începem cu un caz simplificat în [78] pentru ca apoi să generalizăm

rezultatele obținute în [80].

În multe probleme practice, diferite caracteristici fizice sau diferite comportamente ale soluției sunt cuplate prin interfețe. Asemenea situații apar în probleme de interacțiune fluid-fluid sau fluid-structură, în care două domenii corespunzând unor fluide diferite sau unui fluid și unui solid deformabil sunt separate printr-o interfață. În articolul [79] se studiază un model matematic și o problemă de control optimal asociate interacțiunii dintre două fluide imiscibile într-un mediu poros, când pe suprafața care le separă există un salt de temperatură. O motivație fizică pentru considerarea acestui model o reprezintă contaminarea apelor subterane cu substanțe organice sau fenomenele care apar într-o celulă de combustie.

În cadrul proiectelor de cercetare CEEEX 189/2006 (Managementul termic și al apei pentru sisteme de pile de combustie de tip PEM) și CEEEX 320/2006 (Cercetare, dezvoltare și tehnologii pentru celula de combustie cu hidrogen sulfurat lichid în scopul producerii de energie electrică curată) am propus și studiat modele matematice care să descrie fenomenele complexe care au loc într-o pilă de combustie de tip PEM. Aceasta reprezintă una dintre cele mai importante surse noi de energie. Ea este constituită din mai multe straturi de celule de bază în care o membrană conductoare de protoni separă anodul de catod. În timpul procesului de oxidare, hidrogenul disociază în protoni și electroni și rezultatele acestui proces sunt: apă, căldură și energie electrică. Rezultatele pe care le-am obținut pentru modelele matematice asociate acestor fenomene au fost publicate în lucrările [18]-[21].

Dintre cele 16 lucrări despre care am vorbit mai sus, am selecționat pentru prezentarea *in extenso* în Capitolul al 2-lea articolele [20], [79] și [80].

În Capitolul al 3-lea sunt prezentate metode asimptotice în abordarea unor probleme legate de mișcarea fluidelor micropolare și a unor probleme de interacțiune fluid-structură elastică. Rezultatele prezentate au fost obținute în cadrul colaborării mele de aproape 20 de ani cu Prof. Grigory Panasenko de la Universitatea Jean Monnet, Saint-Etienne, Franța, unul dintre cei mai importanți specialiști din lume în metode asimptotice. Această colaborare a început în cadrul grantului internațional Eurrommat No. ICA1-CT-2000-70022 la care am fost director de proiect și s-a concretizat în 18 lucrări publicate și alte 3 în curs de publicare.

În [31], [32] se propune analiza asimptotică a curgerii unui fluid micropolar într-un

tub ondulat periodic, cu perioada și grosimea de ordin ε , unde ε este un parametru mic. Rezultatele principale anunțate în [31] sunt prezentate și demonstrate în detaliu în [32]. Soluția problemei fizice este aproximată de o dezvoltare asimptotică și se obține estimarea erorii care justifică această construcție asimptotică. Apoi se aplică metoda descompunerii asimptotice parțiale a domeniului (vezi [48], [49]) pentru problema considerată. Lucrarea [33] reprezintă o generalizare a articolelor [31], [32]. În [33] se face o analiză asimptotică a curgerii unui fluid micropolar într-o structură tubulară cu mai multe ramuri. Analiza asimptotică asociată curgerii unui fluid micropolar într-un caz mult mai general și, în consecință, mult mai greu de studiat este prezentată în articolul [34]. Se consideră mișcarea unui fluid micropolar într-un tub curbiliniu depinzând de un parametru mic ε . Folosind o schimbare de coordonate convenabilă, înlocuim problema inițială cu o problemă mai complicată, cu coeficienți variabili, formulată într-un dreptunghi. Se construiește soluția asimptotică folosind metoda funcțiilor de tip strat limită. Principala dificultate în studiul acestei probleme apare din următorul motiv: problema satisfăcută de soluția exactă are coeficienți variabili care depind de parametrul mic ε ; problemele satisfăcute de corectorii de tip strat limită trebuie să aibă coeficienții independenți de ε , deoarece soluția acestor probleme trebuie să fie independentă de ε . O altă dificultate care trebuie depășită este aceea că soluția asimptotică nu are divergența nulă și trebuie să construim o funcție cu divergența nulă și care să satisfacă condiții la limită convenabile.

Articolul [51] deschide un șir de lucrări dedicate studiului asimptotic pentru probleme de interacțiune fluid-structură. Se consideră curgerea nestaționară a unui fluid vâcos printr-un canal subțire cu perete elastic. Problema depinde de doi parametri mici; pentru diferite rapoarte ale acestor doi parametri se construiește o dezvoltare asimptotică a soluției periodice și această construcție este justificată printr-o teoremă de estimare a erorii. În [52] se generalizează rezultatele din [51] la cazul mișcării neperiodice. Diferența față de lucrarea precedentă este majoră deoarece în cazul periodic soluția asimptotică verifică aceleași condiții la limită ca soluția exactă; în schimb, în cazul neperiodic urma soluției asimptotice pe frontierele laterale este în general diferită de cea a soluției exacte. Aceasta conduce la necesitatea de a introduce funcții de tip strat limită și problema satisfăcută de acestea necesită o abordare originală, problema nefiind una clasică. Studiul teoretic al acestui caz este completat cu obținerea de rezultate numerice în [50]. Simulările numerice

confirmă rezultatele teoretice punând în evidență formarea stratului limită în apropierea secțiunilor de intrare și ieșire din domeniul de mișcare. Pentru o parte dintre aceste ultime lucrări am obținut Premiul "Spiru Haret" al Academiei Române pentru anul 2008.

Scopul lucrării [53] este de a extinde rezultatele pe care le-am obținut anterior la un caz mai interesant din punct de vedere fizic. Lucrarea prezintă analiza asimptotică a mișcării unui fluid Stokes cu vâscozitate variabilă într-un canal subțire cu pereții superior și inferior elastici. Studiul problemei este mai dificil în acest caz deoarece este necesar să introducem corectori suplimentari corespunzând vâscozității variabile. Construcția asimptotică este justificată riguros cu ajutorul estimării erorii între soluția exactă a problemei și soluția asimptotică. Rezultatele obținute în [50]-[53] se referă la probleme formulate în 2D. Deoarece ca aplicație a mișcării unui fluid vâscos printr-un tub subțire avem în vedere curgerea sângelui printr-o arteră sau venă, este interesant de studiat această problemă și în domenii tridimensionale. În articolele [54], [55] se studiază interacțiunea dintre un fluid vâscos și o structură elastică în cazul în care fluidul vâscos ocupă un domeniu cilindric, iar mișcarea este considerată cu simetrie axială.

Pentru a trata stenoza unei artere se practică angioplastia, adică în structura vasului de sânge se introduce un stent. În acest fel se creează un domeniu fluid a cărui frontieră conține atât părți elastice cât și părți rigide, partea vasului de sânge unde a fost plasat stentul fiind asimilată unei frontiere rigide. În articolul [36] se consideră curgerea unui fluid vâscos printr-un domeniu cu frontieră mixtă: rigidă și elastică format din două domenii dreptunghiulare cu frontiere elastice legate între ele printr-un domeniu cu frontieră rigidă. Se studiază problema din punct de vedere variațional și se construiește soluția asimptotică. Existența unei regiuni de legătură impune considerarea, ca parte a soluției asimptotice, a unor corectori de tip strat limită care corespund acestei regiuni.

În toate lucrările prezentate anterior în acest capitol structura elastică are o grosime mult mai mică decât dimensiunile domeniului ocupat de fluid și, din acest motiv, ea a fost neglijată. În acest fel mediul elastic a devenit o parte a frontierei domeniului fluid și astfel anumite aspecte ale fenomenului fizic au fost ignorate. În articolele [56]-[58], [44] se analizează din punct variațional și asimptotic interacțiunea dintre un fluid vâscos și o structură elastică atunci când grosimea structurii elastice nu se mai neglijează. Cu alte cuvinte, în problemele studiate în aceste ultime patru lucrări atât fluidul cât și mediul elastic ocupă

domenii de aceeași dimensiune și modelul matematic utilizat este altul decât cel din cazurile în care structura elastică era doar ”o frontieră”. În [56], [57] se studiază interacțiunea ”fluid vâcos-placă elastică subțire” atunci când rigiditatea și densitatea mediului elastic sunt ”mari”. Mai exact, grosimea plăcii fiind considerată parametrul mic al problemei, ε , presupunem că densitatea și modulul lui Young sunt de ordinul ε^{-1} și, respectiv, ε^{-3} . Se construiește o dezvoltare asimptotică completă și se demonstrează că termenul principal al dezvoltării satisface ecuațiile din [51].

Articolul [58] reprezintă generalizarea lucrărilor [56], [57]. Se prezintă o construcție asimptotică pentru problema de interacțiune dintre un fluid vâcos și o structură elastică atunci când domeniul de mișcare este un tub cilindric, subțire și elastic. Se studiază problema cu simetrie axială și, la fel ca în cazul plan, analiza asimptotică se face pentru o grosime a peretelui tubului, ε , care tinde la zero, în timp ce densitatea și modulul lui Young corespunzătoare materialului elastic sunt de același ordin ca în [57]. În cele trei lucrări citate anterior, [56]-[58], densitatea și vâscozitatea fluidului se consideră de ordinul unității, ceea ce înseamnă că densitatea mediului elastic este mult mai mare decât densitatea fluidului. Deoarece în multe aplicații practice nu se întâmplă așa, în [44] analiza asimptotică s-a realizat în cazul în care densitățile celor două medii sunt de ordinul unității. În [44] am considerat un model tridimensional al interacțiunii dintre o placă elastică subțire, stratificată și un fluid vâcos. La fel ca în articolele [56]-[58], modulul lui Young se consideră de ordin ε^{-3} , dar densitatea plăcii elastice este de ordin 1. În aceste condiții, dezvoltarea asimptotică a soluției este construită și apoi justificată. Problema limită conține o condiție la limită nestandard pentru problema Stokes. Analiza asimptotică este aplicată la reducerea asimptotică parțială a dimensiunii fazei solide și la obținerea condițiilor de cuplare între modelele 2D și 3D ale plăcii.

Lucrarea [59] reprezintă un prim pas în dezvoltarea analizei asimptotice pentru modelul Kelvin-Voigt pentru o bandă vâsco-elastică subțire, stratificată. Reducerea dimensională, combinată cu procedura de omogenizare permite construirea unei dezvoltări asimptotice complete a soluției și justificarea modelului limită unidimensional.

Dintre lucrările prezentate mai sus, în Capitolul al 3-lea se detaliază articolele [34], [51], [57].

Ultimul capitol al acestei teze prezintă câteva elemente ale activității mele viitoare

de cercetare, reprezentate de lucrări aflate într-un anumit stadiu în cadrul procesului de publicare.

În lucrarea [85] se studiază o problemă de control optimal, cu controlul în coeficienți, cu aplicații în domeniul medical. Se propune un model matematic care să descrie modalitatea de a obține o presiune sangvină normală, controlată de vâscozitatea variabilă a sângelui.

Articolul [81] conține analiza asimptotică a interacțiunii dintre o placă elastică subțire, stratificată și un strat de fluid vâcos. În [57] am prezentat această analiză asimptotică pentru un anumit tip de material elastic, caracterizat de valori "mari" ale densității și rigidității mediului elastic, așa cum am precizat mai sus. În [44] analiza asimptotică se face considerând că doar modulul lui Young are valori mari, densitatea solidului fiind de ordinul unității. Deoarece în viața reală valorile densității și modulului lui Young diferă foarte mult de la un material la altul, cazurile particulare analizate în [57] și [44] reprezintă o limitare din punct de vedere al fenomenului fizic. Noutatea lucrării [81] constă în faptul că propunem o construcție asimptotică, riguros justificată de estimarea erorii, pentru ordine de mărime variate (mari sau mici) ale densității și rigidității plăcii și obținem probleme limită care sunt foarte diferite de la un caz la altul. În acest context foarte general, cazurile studiate în [57] și [44] reprezintă două cazuri particulare din totalul de 24 de cazuri analizate în lucrarea [81]. În [82] realizăm analiza asimptotică în cazul cilindric, fără a impune nicio restricție privind ordinul de mărime al caracteristicilor mediului elastic. Astfel, problema studiată în [58] devine un caz particular al celor 6 cazuri analizate în [82].

Dacă în articolul [59] se dau câteva elemente ale analizei asimptotice pentru modelul Kelvin-Voigt pentru o bandă vâsco-elastică subțire, stratificată în cazul quasi-static, în [84] aceste elemente sunt dezvoltate și extinse și la cazul dinamic.

În sfârșit, în lucrarea [83] se consideră un strat de fluid vâcos separat de o placă elastică, subțire, stratificată în 3D. Parametrul mic al problemei, ε , se definește ca raportul dintre grosimea plăcii și cea a unuia dintre cele două straturi de fluid. Se presupune că modulul lui Young este de ordinul ε^{-3} , în timp ce vâscozitatea fluidului și densitățile fluidului și plăcii elastice sunt de ordinul unității. Se prezintă analiza variațională și asimptotică a modelului considerat. Se analizează problema limită, care conține o condiție la limită ne-standard pentru ecuațiile Stokes.

În încheierea prezentării rezultatelor pe care le-am obținut în activitatea mea de cercetare, menționez și alte articole legate de anumite probleme aplicative concrete pentru care am propus modele matematice. În perioada ianuarie-iunie 1995 am obținut o bursă postdoctorală la Universitatea Jean Monnet, Saint-Etienne, Franța la Laboratorul de analiză numerică, condus de Prof. C. Carasso. Articolul [27] reprezintă modelul numeric pe care l-am propus pentru simularea curgerii jetului de cerneală dintr-o imprimantă. Articolele [76], [77] au fost elaborate în cadrul proiectului național CERES 4-96/2004, la care am fost coordonator din partea Institutului de Matematică "Simion Stoilow" al Academiei Române, proiect în colaborare cu Institutul de Metalurgie. Ele prezintă un model matematic ce descrie comportarea hidrodinamică a piliturii topite în zona meniscului, atunci când suprafața care se solidifică este considerată fie rigidă, fie ca având caracteristici de mediu elastic.

Trăsătura comună a lucrărilor mele este reprezentată de propunerea sau identificarea de modele matematice care să descrie cât mai exact posibil fenomene fizice concrete, urmată de analiza acestor modele. Cu cât este mai complex fenomenul considerat, cu atât este mai complicat modelul matematic asociat și cu atât mai dificil studiul acestuia. De aceea, în general, avem de a face cu probleme neliniare sau/și cuplate pentru care furnizăm informații calitative folosind instrumente matematice ca: formulări variaționale, probleme de minim, metode de tip strat limită, teoreme de punct fix, scufundări compacte, estimări *a priori*, probleme penalizate, etc.

Rezultatele incluse în această lucrare au fost obținute singură sau în colaborare cu profesori și cercetători din străinătate și din țară, așa cum se poate vedea din lista de lucrări prezentată. Sunt mai multe nume ale colaboratorilor mei care ar trebui menționate aici, dar mă voi opri la două dintre acestea, care au marcat în mod hotărâtor evoluția mea profesională. Este vorba despre conducătorul tezei mele de doctorat, regretatul Profesor dr. Horia I. Ene, și Profesor dr. Grigory P. Panasenko. Întâlnirea cu primul m-a ajutat să-mi încep cariera la Secția de Matematică a INCREST, poziție râvnită de orice tânăr absolvent al Facultății de Matematică din acele timpuri. Șansa de a lucra cu cel de-al doilea, unul dintre cei mai mari specialiști la nivel mondial în domeniul metodelor asimptotice, mi-a deschis interesul spre acest domeniu de cercetare al matematicii și mi-a permis stabilirea unei lungi relații de colaborare, care a început în urmă cu 18 ani și s-a concretizat în

elaborarea a 21 de lucrări, dintre care 18 deja publicate.

References

- [1] F. Abergel, E. Casas, Some optimal control problems of multistate equations appearing in fluid mechanics, *ESAIM-Math. Mod. Numer. Anal.*, **27**, 223-247, 1993.
- [2] E. A. Adomavichus, G. V. Alekseev, Theoretical analysis of inverse extremal problems of admixture diffusion in viscous fluids, *Journal of inverse and ill-posed problems*, **9**, 435-468, 2001.
- [3] G. V. Alekseev, O. V. Soboleva, D. A. Tereshko, Identification problems for a steady-state model of mass transfer, *J. Appl. Mech. Tech. Phy.*, **49**, 537-547, 2008.
- [4] H. W. Alt, Strömungen durch inhomogene poröse Medien mit freiem Rand, *J. reine angew. Math.*, **305**, 89-115, 1979.
- [5] H. W. Alt, L. A. Caffarelli, A. Friedman, Asymmetric jet flows, *Comm. Pure Appl. Math.*, **35**, 29-68, 1982.
- [6] H. W. Alt, L. A. Caffarelli, A. Friedman, Axially symmetric jet flows, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **81**, 97-149, 1983.
- [7] V. Arnautu, J. Sprekels, D. Tiba, Optimization problems for curved mechanical structures, *SIAM J. Control Optim.*, **44**, 743-775, 2005.
- [8] C. Baiocchi, Su un problema di frontiera libera connesso a questioni di idraulica, *Annali. Mat. Pura Appl.*, **92**, 107-127, 1972.
- [9] C. Baiocchi, A. Friedman, A filtration problem in a porous medium with variable permeability, *Annali. Mat. Pura Appl.*, **114**, 377-393, 1977.
- [10] M. Barboteu, M. Sofonea, D. Tiba, The control variational method for beams in contact with deformable obstacles, *ZAMM*, **92**, 25-39, 2012.

- [11] V. Barbu, T. Precupanu, *Convexity and optimization in Banach spaces*, Springer 2012.
- [12] V. Barbu, G. Marinoschi, An optimal control approach to the optical flow problem, *Systems&Control Letters*, **87**, 1-9, 2016.
- [13] M. Beldiman, I. Boaca, G. Marinoschi, Optimization of a singular flow in a porous medium, *ZAMM*, **93**, 633-647, 2013.
- [14] V. Benci, On a filtration problem through a porous medium, *Annali. Mat. Pura Appl.*, **100**, 191-209, 1974.
- [15] G. Birkhoff, E. H. Zarantonello, *Jets, wakes and cavities*, Academic Press, New York, 1957.
- [16] T. Boulanger, A. Chrysochoos, C. Mabru, A. Galtier, Calorimetric analysis of dissipative and thermoelastic effects associated with the fatigue behavior of steels, *Int. J. Fatigue*, **26**, 221-229, 2004.
- [17] H. Brezis, D. Kinderlehrer, G. Stampacchia, Sur une nouvelle formulation du problème de l'écoulement à travers une digue, *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A*, **287**, 711-714, 1978.
- [18] A. Capatina , H. Ene, G. Pasa, D. Polisevski, **R. Stavre**, Optimal relations between the parameters of a P.E.M. fuel cell, *Math. Rep.*, **10(60)**, 299-308, 2008.
- [19] A. Capatina , H. Ene, G. Pasa, D. Polisevski, **R. Stavre**, Mathematical Model for the P.E.M. Fuel Cells using Sulfuretted Hydrogen, *Math. Rep.*, **11(61)**, 1-10, 2009.
- [20] A. Capatina , H. Ene, G. Pasa, D. Polisevski, **R. Stavre**, Variational approach and optimal control of a PEM fuel cell, *Nonlin. Anal. TMA*, **74**, 3242-3260, 2011.
- [21] A. Capatina , H. Ene, D. Polisevski, **R. Stavre**, Parametric study of fluid dynamics in PEM fuel cells, *Proc. Rom. Acad. Ser. A*, **10**, 101-109, 2009.
- [22] A. Capatina, **R. Stavre**, Optimality conditions for control problems in heat conducting Navier-Stokes fluid, *Rev. Roum. Sci. Tech.-Mec. Appl.*, **40**, 189-199, 1995.

- [23] A. Capatina, **R. Stavre**, Optimal control of a non-isothermal Navier-Stokes flow, *Int. J. Engng. Sci.*, **34**, 59-66, 1996.
- [24] A. Capatina, **R. Stavre**, Numerical analysis of a control problem in heat conducting Navier-Stokes fluid, *Int. J. Engng. Sci.*, **34**, 1467-1476, 1996.
- [25] A. Capatina, **R. Stavre**, A control problem in biconvective flow, *J. Math. Kyoto Univ.*, **37**, 585-595, 1997.
- [26] A. Capatina, **R. Stavre**, Algorithms and convergence results for an inverse problem in heat propagation, *Int. J. Engng. Sci.*, **38**, 575-587, 2000.
- [27] C. Carasso, **R. Stavre**, Numerical simulation of a jet of ink, *Ann. Univ. Buc.*, **1-2**, 31-36, 2001.
- [28] J. Carrillo-Menendez, M. Chipot, On the dam problem, *J. Diff. Eqns*, **45**, 234-271, 1982.
- [29] J. Cea, *Optimization. Théorie et algorithmes*, Dunod, Paris, 1971.
- [30] S. Challal, A. Lyaghfour, The heterogeneous dam problem with leaky boundary condition, *Comm. Pure Appl. Anal.*, **10**, 93-125, 2011.
- [31] D. Dupuy, G. P. Panasenko, **R. Stavre**, Asymptotic analysis for micropolar fluids, *C. R. Mécanique*, **332**, 31-36, 2004.
- [32] D. Dupuy, G. P. Panasenko, **R. Stavre**, Asymptotic methods for micropolar flows in a tube structure, *Math. Mod. Meth. Appl. Sci. (M³AS)*, **14**, 735-758, 2004.
- [33] D. Dupuy, G. P. Panasenko, **R. Stavre**, Multiscale modeling for micropolar flows in a tube structure with one bundle of tubes, *Int. J. Multiscale Comput. Engng.*, **2**, 461-475, 2004.
- [34] D. Dupuy, G. P. Panasenko, **R. Stavre**, Asymptotic solution for a micropolar flow in a curvilinear channel, *Z. Angew. Math. Mech. (ZAMM)*, **88**, 793-807, 2008.
- [35] A. C. Eringen, Theory of micropolar fluids, *J. Math. Mech.*, **16**, 1-18, 1966.

- [36] R. Fares, G. P. Panasenko, **R. Stavre**, A viscous fluid flow through a thin channel with mixed rigid-elastic boundary. Variational and asymptotic analysis, *Abstract Appl. Anal.*, **Volume 2012, ID 152743**, 47 pages, 2012.
- [37] R. Finn, Some theorems on discontinuity of plane fluid motion, *J. Anal. Math.*, **4**, 246-291, 1954-1956.
- [38] A. Friedman, S. Huang, The inhomogeneous dam problem with discontinuous permeability, *Annali Scuola Normale Superiore di Pisa*, **14**, 49-77, 1987.
- [39] D. Gilbarg, Jets and cavities, *Handbuch der Physik*, **9**, 311-445, 1960.
- [40] Y. Kan-on, K. Namkawa, Y. Teramoto, On the equations of biconvective flow, *J. Math. Kyoto Univ.*, **32**, 135-153, 1994.
- [41] M. Levandovsky, W. S. Childress, S. H. Hunter, E. A. Spiegel, A mathematical model of pattern formation by swimming microorganisms, *J. Protozoology*, **22**, 296-306, 1975.
- [42] J. L. Lions, *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Dunod, Paris, 1968.
- [43] J. L. Lions, *Contrôle de systèmes distribués singuliers*, Dunod, Paris, 1983.
- [44] I. Malakhova-Ziablova, G. Panasenko, **R. Stavre**, Asymptotic analysis of a thin rigid stratified elastic plate-viscous fluid interaction problem, *Appl. Anal.*, **95**, 1467-1507, 2016.
- [45] S. Martin, C. Vázquez, Homogenization of the layer-structured dam problem with isotropic permeability, *Nonlin. Anal. RWA*, **14**, 2133-2151, 2013.
- [46] A. Mohammadi, J. M. Floryan, Groove optimization for drag reduction, *Phys. Fluids*, **25**, 113601, 2013.
- [47] P. Neittaanmaki, D. Tiba, *Optimal control of nonlinear parabolic systems*, Marcel Dekker, New York, 1994.

- [48] G. P. Panasenko, Method of asymptotic partial decomposition of the domain, *Math. Mod. Meth. Appl. Sci.*, **8**, 139-156, 1998.
- [49] G. P. Panasenko, Asymptotic partial decomposition of variational problems, *C. R. Acad. Sci. Paris Série IIb*, **327**, 1185-1190, 1999.
- [50] G. P. Panasenko, Y. Sirakov, **R. Stavre**, Asymptotic and numerical modeling of a flow in a thin channel with visco-elastic wall, *Int. J. Multiscale Comput. Engng.*, **5**, 473-482, 2007.
- [51] G. P. Panasenko, **R. Stavre**, Asymptotic analysis of a periodic flow in a thin channel with visco-elastic wall, *J. Math. Pures Appl.*, **85**, 558-579, 2006.
- [52] G. P. Panasenko, **R. Stavre**, Asymptotic analysis of a non-periodic flow in a thin channel with visco-elastic wall, *Netw. Heterog. Media*, **3**, 651-673, 2008.
- [53] G. P. Panasenko, **R. Stavre**, Asymptotic analysis of the Stokes flow with variable viscosity in a thin elastic channel, *Netw. Heterog. Media*, **5**, 783-812, 2010.
- [54] G. P. Panasenko, **R. Stavre**, Well posedness and asymptotic expansion of solution of Stokes equation set in a thin cylindrical elastic tube, Around the Research of Vladimir Maz'ya II/International Mathematical Series, Volume 12, editors: Ari Laptev, Springer 2010 (book chapter).
- [55] G. P. Panasenko, **R. Stavre**, Asymptotic analysis of the Stokes flow in a thin cylindrical elastic tube, *Appl. Anal.*, **91**, 1999-2027, 2012.
- [56] G. P. Panasenko, **R. Stavre**, Asymptotic analysis of a viscous fluid-thin plate interaction: periodic flow, *C. R. Mécanique*, **340**, 590-595, 2012.
- [57] G. P. Panasenko, **R. Stavre**, Asymptotic Analysis of a Viscous Fluid-Thin Plate Interaction: Periodic Flow, *Math. Mod. Meth. Appl. Sci. (M3AS)*, **24**, 1781-1822, 2014.
- [58] G. P. Panasenko, **R. Stavre**, Viscous fluid-thin cylindrical elastic layer interaction: asymptotic analysis, *Appl. Anal.*, **93**, 2032-2056, 2014.

- [59] G. Panasenko, **R. Stavre**, Asymptotic analysis for the Kelvin-Voigt model for a thin laminate, *C. R. Mécanique*, **343**, 365-370, 2015.
- [60] M. L. Pastor, X. Balandraud, M. Grédiac, J. L. Robert, Applying infrared thermography to study the heating of 2024-T3 aluminium specimens under fatigue loading, *Infrared Physics&Technology*, **51**, 505-515, 2008.
- [61] S. G. Pyatkov, M. L. Samkov, Solvability of some inverse problems for the non-stationary heat-and-mass-transfer system, *J. Math. Anal. Appl.*, **446**, 1449-1465, 2017.
- [62] **R. Stavre-Stăncescu**, The flow of a fluid through a porous medium with variable permeability, *Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie*, **27(75)**, 169-179, 1984.
- [63] **R. Stavre-Stăncescu**, Fluid flow through a porous medium with variable permeability in which the discharge is unknown, *Revue Roumaine Sci. Tech., Mec. Appl.*, **29**, 391-402, 1984.
- [64] **R. Stavre**, B. Vernescu, Incompressible fluid flow through a non-homogeneous and anisotropic dam, *Nonlin. Anal. TMA*, **9**, 799-810, 1985.
- [65] **R. Stavre**, B. Vernescu, The free boundary problem for the anisotropic dam, *Arch. Mech.* **4**, 455-463, 1988.
- [66] **R. Stavre**, B. Vernescu, Free boundary properties in non-homogeneous porous media fluid flow, *Int. J. Engng. Sci.*, **27**, 399-409, 1989.
- [67] **R. Stavre**, On a free boundary problem in fluid mechanics, *Eur. J. Mech. B/Fluids*, **10**, 75-95, 1991.
- [68] **R. Stavre**, The impact of a jet with two fluids on a porous wall, *Int. Ser. Num. Math.*, **107**, 11-23, 1992.
- [69] **R. Stavre**, Study of a jet incident on a porous wall in a gravity field, *IMA J. Appl. Math.*, **52**, 93-103, 1994.
- [70] **R. Stavre**, Analysis and finite element approximation of a control model for the dam problem, *Math Reports*, **1**, 289-304, 1999.

- [71] **R. Stavre**, A distributed control problem for micropolar fluids, *Rev. Roum. Math. Pures Appl.*, **45**, 353-358, 2000.
- [72] **R. Stavre**, Distributed control of a heat-conducting, time-dependent, Navier-Stokes fluid, *Glasgow Math. J.*, **44**, 191-200, 2002.
- [73] **R. Stavre**, The control of the pressure for a micropolar fluid, *Z. Angew. Math. Phys. (ZAMP)*, **53**, 912-922, 2002.
- [74] **R. Stavre**, Optimization and numerical approximation for micropolar fluids, *Num. Funct. Anal. Optimiz.*, **24**, 223-241, 2003.
- [75] **R. Stavre**, Optimization of a non stationary flow in a magnetic field, Current Topics in Continuum Mechanics, vol. III, general editor Lazar Dragoş, Editura Academiei Române, 181-211, 2006 (book chapter).
- [76] **R. Stavre**, Incompressible flow of the molten powder in meniscus zone of continuous casting mold, *Ann. Univ. Buc.*, **1**, 121-128, 2006.
- [77] **R. Stavre**, Viscous flow of the molten powder in meniscus zone with elastic boundary, *Bulletin of the Transilvania University of Brasov*, **13**, 379-389, 2006.
- [78] **R. Stavre**, Optimization of the blood flow in venous insufficiency, *Ann. Univ. Buc.*, **5(LXIII)**, 383-402, 2014.
- [79] **R. Stavre**, A Distributed Control Problem for Two Coupled Fluids in a Porous Medium, *SIAM J. Control Optim. (SICON)*, **53**, 313-335, 2015.
- [80] **R. Stavre**, A boundary control problem for the blood flow in venous insufficiency. The general case, *Nonlin. Anal. RWA*, **29**, 98-116, 2016.
- [81] G. P. Panasenko, **R. Stavre**, Viscous fluid-thin elastic plate interaction: asymptotic analysis with respect to the rigidity and density of the plate, *Appl. Math. Optim.*, DOI:10.1007/s00245-018-9480-2, published on line February 2018.
- [82] G. P. Panasenko, **R. Stavre**, Viscous fluid-thin cylindrical elastic body interaction: asymptotic analysis on contrasting properties, *Appl. Anal.*, DOI:10.1080/000336811.2018.1442000, published on line March 2018.

- [83] I. Orlik, G. P. Panasenko, **R. Stavre**, Asymptotic analysis of a viscous fluid layer separated by a thin rigid stratified elastic plate, *in preparation*
- [84] G. P. Panasenko, **R. Stavre**, Asymptotic solution for a visco-elastic thin plate; quasi-steady and dynamic cases *in preparation*.
- [85] **R. Stavre**, Optimization of the blood pressure with the control in coefficients, *in preparation*.