ACADEMIA
ROMÂNĂ
SCOSAAR

TEZĂ DE ABILITARE

Deterministic and Stochastic Variational Inequalities. A convex to nonconvex journey

Eduard-Paul Rotenştein

REZUMAT

Domeniul fundamental: Matematică și științe ale naturii

Domeniul de abilitare: Matematică

Teză elaborată în vederea obţinerii atestatului de abilitare în scopul conducerii lucrărilor de doctorat în domeniul Matematică.

BUCUREŞTI, 2019

Rezumat

Începând cu anii ´60, o atenţie deosebită a căpătat studiul ecuaţiilor diferenţiale stochastice reflectate, procesul de reflexie fiind interpretat în diverse moduri. În lucrarea de pionierat din acest domeniu, Skorokhod consideră problema de reflexie a unor procese de difuzie în interiorul unor domenii mărginite (vezi [24]). Pe de altă parte, Tanaka studiază condiţiile la frontieră pentru probleme de reflexie a unor ecuaţii diferenţiale stochastice în domenii convexe (vezi [25]). Cercetarea în acest domeniu a devenit rapid subiectul de interes al multor cercetători care consideră procesul de stare ca fiind reflectat de una sau de două bariere, atât în cazul ecuaţiilor progresive cât şi al celor retrograde. De asemenea, aplicaţiile nu au întârziat să apară.

Scopul prezentei tezei este acela de a consemna contribuţiile autorului pe parcursul perioadei scurse de la susţinerea tezei de doctorat din 2009. Cercetarea poate fi caracterizată ca fiind focusată pe două linii directoare: inecuaţii variaţionale stochastice progresive, iar cea de a doua, inecuaţii variaţionale stochastice retrograde. O descriere mai detaliată a istoricului problemelor precum şi a poziţionării în cadrul acestui istoric a rezultatelor cuprinse în teză se pot regăsi în Capitolul 1.

Scopul constă în extinderea, pentru început, a noţiunii de reflexie pentru ecuaţii diferenţiale stochastice progresive şi retrograde, prin permiterea perturbării direcţiilor de reflexie cu ajutorul unui termen Lipschitz care face să se piardă proprietatea de maximală monotonie a operatorului care acţionează în cadrul ecuaţiilor considerate. Astfel, schemele clasice de aproximare de tip Yosida trebuiesc reinterpretate. Pe de altă parte, autorul abordează şi o altă gamă de probleme, prin prezentarea contextului nou ce apare atunci când renunţăm la convexitatea domeniului restricţiilor. Generalizarea vine cu două noi tipuri de dificultăţi, diferite de lipsa de monotonie sau a proprietăţii Lipschitz a operatorilor multivoici utilizaţi. Pentru început, atunci când studiem cazul ecuaţiilor forward, trebuie să analizăm iniţial o problemă deterministă de tip Skorokhod. Acest lucru se realizează prin penalizări de tip Yosida. Dacă în cadrul convex am dezvoltat o tehnică ce permite să demonstrăm existenţa şi unicitatea soluţiilor, în cadrul nonconvex chiar şi pentru ecuaţia aproximantă nu existau rezultate care să furnizeze existenţa şi unicitatea soluţiei. Din acest motiv am dezvoltat cadrul şi am construit instrumentele matematice necesare care să permită aproximarea ecuaţiei deterministe mutivoce aproximante. Mai precis, am adaptat şi rafinat proprietăţile rezolventei şi aproximantei Yosida pentru noul cadru nonconvex, într-o manieră similară rezultatelor clasice existente în contextul convex (vezi Barbu [2, Capitolul 1] sau Brézis [5, Capitolul II]).

Rezultatele obţinute permit, de asemenea, abordarea celui de al doilea tip de probleme ce apar atunci când părăsim cadrul restricţiilor de tip convex, aşa cum se poate vedea în Capitolul 3, Secţiunea 3.4. Când studiem ecuaţii diferenţiale stochastice retrograde cu reflexie oblică şi restricţii convexe, nu trebuie să considerăm pentru început o problemă deterministă, ci putem obţine direct rezultate privind existenţa şi unicitatea soluţiei. Această soluţie poate fi tare sau slabă, după cum termenul perturbator al reflexiei poate fi independent sau dependent de procesul de stare; mai mult, procesul feedback este de tip absolut continuu, nu doar continuu şi cu variaţie mărginită aşa cum obţinem în cazul progresiv. Cu toate acestea, problema existenţei şi a unicităţii soluţiei pentru inecuaţii variaţionale stochastice retrograde cu restricţii nonconvexe a fost - şi parţial rămâne încă - o problemă importantă a analizei stochastice. Cu ajutorul instrumentelor construite în Capitolul 2, Secţiunea 2.3 rezolvăm parţial problema atunci când înlocuim mişcarea Browniană ce guvernează ecuaţia cu un alt tip de proces stochastic, şi anume PDMP (Piecewise deterministic Markov process).

De asemenea, este prima oară când au fost folosite măsurile de ocupaţie pentru probleme de control asociate incluziunilor variaţionale stochastice retrograde. Ca şi aplicaţii analizăm un model privind momentul infecţiei într-o clasă de reţele genetice stochastice. Exemplul clasic poate fi prezentat ca fiind un sistem format dintr-o gazda şi un virus, acesta din urmă urmând a se păstra în starea lisogenică. Momentul în care se află în stare litică este de fapt momentul anterior infectării. Suntem interesaţi astfel în a determina momentul infectării sistemului. Evoluţia este modelată de un proces controlat, deterministic pe traiectorii, guvernat de salturi aleatoare, în nişte stări numite moduri.

Prezentăm în cele ce urmează o scurtă descriere a structurii tezei.

Capitolul 1 prezintă o istorie relativ detaliată a tematicii abordate, cu precizarea contribuţiilor autorului în domeniu.

Capitolul 2 este compus din cinci secţiuni şi este dedicat analizei unor inegalităţi variaţionale progresive, determinsite şi stochastice, cu reflexie generalizată. Pentru început, Secţiunea 2.1 prezintă criterii de invarianţă pentru o ecuaţie diferenţială stochastică a cărei evoluţie este constrânsă a se păstra în nişte tuburi de siguranţă. Metoda constă în a considera o problemă echivalentă în care pătratul funcţiei distanţă este soluţie de vâscozitate pentru o anumită ecuaţie cu derivate parţiale. Obţinem, de asemenea, condiţii suficiente de invarianţă pentru cazul în care coeficientul de drift este dat într-o formă liniară. Această formă simplificată permite utilizarea condiţiilor în aplicaţii. Problemele analizate devin mai generale în Secţiunea 2.2, al cărei obiectiv principal îl constituie studiul unei inegalităţi stochastice variaţionale ce prezintă în componenţa sa un temen de forma $H\left(X\right)\partial\varphi\left(X\right)$, ce va fi denumit mulţimea *subgradienţilor oblici.*

Problema devine interesantă tocmai datorită prezenţei noului termen, ce impune o abordare specifică deoarece acesta nu păstrează nici proprietatea Lipschitz a matricii $H(X)$ nici maximala monotonie a operatorului subdiferenţial. În cazul progresiv analizăm, pentru început, o problemă deterministă generalizată, de tip Skorokhod, cu reflexie oblică la frontiera domeniului:

$$dx\left(t\right)+H\left(x\left(t\right)\right)dk\left(t\right)=f\left(t,x\left(t\right)\right)dt+dm\left(t\right),\quad t\geq 0;\quad dk\left(s\right)\in\partial\varphi\left(x\left(s\right)\right)\left(ds\right),$$

unde imputul singular $m:\mathbb{R}_{+}\rightarrow\mathbb{R}^{d}$ este o funcţie continuă. Rezultatele de existenţă şi unicitate a soluţiei sunt obţinute prin tehnici de penalizare de tip Yosida, adaptate noului context.

În Secţiunea 2.3 renunţăm la convexitatea constrângerilor existente în secţiunea precedentă şi considerăm ecuaţia ca fiind guvernată de produsul $H\partial^{-}\varphi$, unde $\partial^{-}\varphi$ reprezintă operatorul subdiferenţial Fréchet al unei funcţii (ρ,γ)-semiconvexă φ. Deşi, în linii mari, abordarea problemei este similară cu cea din cazul convex, lucrurile stau fundamental diferit deoarece, chiar pentru ecuaţiile aproximante din cadrul determinist nu existau rezultate de existenţă a soluţiei. Partea esenţială constă în rezolvarea unei probleme fundamentale de tip Cauchy. Pentru a realiza aceasta construim un cadru nou de aproximare a ecuaţiilor în contextul nonconvex. Abia după aceasta putem aborda problema nonconvexă Skorokhod, cu subgradienţi Fréchet, şi, ca şi aplicaţii, furnizăm rezultatele dorite pentru inegalităţi variaţionale stochastice generalizate, cu constrângeri nonconvexe.

Secţiunea 2.4 studiază probleme de obstacol pentru o serie de ecuaţii diferenţiale stochastice de tip parabolic. Punctul cheie îl reprezintă impunerea doar a unor condiţii de Hölder continuitate pentru coeficientul de difuzie. În setup-ul dat de tripletul Gelfand-Lions, autorii obţin, în condiţia impunerii unor ipoteze destul de rigide pentru bariere, existenţa unei soluţii tari pentru ecuaţia stochastică multivocă considerată. Renunţarea la aceste ipoteze permite identificarea unei soluţii slab-variaţionale. Pe lângă importanţa în sine a acestui rezultat, furnizăm o construcţie riguroasă pentru formalismul utilizat în lucrarea Bensoussan, Răşcanu [3], unde chestiunile de măsurabilitate ale proceselor ce apar sunt eronate. Capitolul se încheie cu Secţiunea 2.5, al cărei scop îl constituie analizarea unor inegalităţi variaţionale stochastice infinit dimensionale, cu reflexie generalizată la frontieră. Prezentăm exsitenţa soluţiei pentru o problemă multivocă netedă şi câteva aplicaţii la sisteme de EDP.

Capitolul 3 este, de asemenea, structurat în cinci secţiuni şi abordează diverse inegalităţi variaţionale stochastice retrograde, cu sau fără reflexie generalizată.

Secţiunea 3.1 analizează existenţa şi unicitatea soluţiei pentru o ecuaţie retrogradă stochastică, cu constrângeri convexe şi guvernată de o mişcare Browniană B,

$$-dY_t + H(t, Y_t)\,\partial\varphi(Y_t)(dt) \ni F(t, Y_t, Z_t)\,dt - Z_t dB_t,\ t \in [0, T], \quad Y_T = \eta, \tag{1}$$

Atunci când H posedă doar o dependenţă de timp, obţinem existenţa unei soluţii tari pentru ecuaţie, împreună cu existenţa unui proces feedback de tip absolut continuu. În cazul general care matricea H depinde şi de procesul de stare, utilizăm condiţii de tightness pentru găsirea unei soluţii. Chiar dacă $S-$topologia introdusă de Jakubowski [13] (şi utilizată pentru situaţii similare de Boufoussi, Casteren [4] sau LeJai [15]) pare adecvată contextului, regularitatea obţinută pentru procesul subgradient în ecuaţia aproximantă permite obţinerea convergenţelor necesare în topologia Meyer-Zheng. În Secţiunea 3.2 renunţăm la matricea de perturbare a reflexiei H şi analizăm o schemă de aproximare numerică de tip Euler-Yosida pentru inecuaţii variaţionale stochastice retrograde de tip Markovian. De asemenea, este furnizată şi rata de convergenţă a schemei introduse. Secţiunea 3.3 este dedicată studiului problemei existenţei şi unicităţii soluţiei pentru o inecuaţie variaţională retrogradă de tipul (1), cu driver-ul $F\left(t, Y_t, Z_t, Y_{t+\delta(t)}, Z_{t+\eta(t)}\right),\ t \in [0, T]$ şi condiţiile terminale $Y_t = \xi_t$, $Z_t = \zeta_t$, $t \in [T, T+\ell]$, $\mathbb{P}$–a.s. Instrumentele care permit obţinerea rezultatelor dorite sunt cele din Capitolul 3, Secţiunea 3.1 precum şi cele din articolul Peng,Yang [18].

Secţiunea 3.4 realizează trecerea de la cadrul de lucru convex la cel nonconvex pentru inegalităţi variaţionale stochastice retrograde. Studiem un model matematic asociat momentului de infecţie în reţele genetice multistabile. Procesele matematice sunt de tip salt hibrid. Saltul este guvernat de procese pure de salt şi este asociat unor legături ADN. Componenta diferenţială urmează o dinamică de tip retrograd, stochastică, cu reflexie generalizată în interiorul unor domenii nonconvexe, dependente de salt. Studiem, pentru început, existenţa soluţiei pentru inecuaţiile variaţionale asociate, prin reducerea lor la o familie de incluziuni diferenţiale ordinare (vezi Confortola, Fuhrman, Jacod [6]), cu reflexie oblică în domenii semiconvexe. Considerăm în continuare funcţii generatoare dependente de control şi, prin intermediul măsurilor de ocupaţie, studiem pentru prima oară, ecuaţiile retrograde stochastice obţinute.

Folosind reducerea ecuaţiilor retrograde guvernate de PDMP la sisteme de ecuaţii diferenţiale ordinare introdusă de Confortola, Fuhrman, Jacod [6], în Secţiunea 3.5 propunem un criteriu algebric explicit, uşor verificabil, privind nula-controlabilitate aproximativă pentru o clasă generală de sisteme de salt, cu zgomot multiplicativ, liniare pe traiectorii. Apoi, prin exemple, arătăm că noţiunea de controlabilitate aproximativă este strict mai tare decât cea de nula-controlabilitate aproximativă. Furnizăm, de asemenea, un criteriu suficient pentru această noţiunea mai puternică. Rezultatele sunt ilustrate pe un model bacterial introdus în Krishna, Banerjee, Ramakrishnan, Shivashankar [14] şi redus în Crudu, Debussche, Rădulescu [8]).

Capitolul 4 este dedicat prezentării unor probleme deschise şi a unor teme viitoare de studiu, aflate în strânsă legătură cu subiectele analizate pe parcursul acestei lucrări.

Prezenta teză se încheie cu o Bibliografie amplă, de 177 lucrări, citate în totalitate în cadrul textului.

Lucrarea de faţă se bazează pe rezultatele cuprinse în cadrul a 11 articole ştiinţifice, realizate în cadrul următoarelor proiecte de cercetare:

- CNCSIS 1156 / 2005 (-2008), *Deterministic and stochastic differential models with states constraints. Control, invariance and numerical approximation* (director prof. dr. Aurel Răşcanu)
- IDEI ID_395 / 2007 (-2010), *Differential systems with random perturbations; control and viability problems* (director prof. dr. Aurel Răşcanu)
- PN-II-ID-PCE-2011-3-0843, no. 241/05.10.2011 (-2016), *Deterministic and stochastic systems with state constraints* (director prof. dr. Aurel Răşcanu)
- PN-II-ID-PCE-2011-3-1038, no. 208/05.10.2011 (-2015), *Diagonal stability and flow invariance in control engineering. Techniques specialized for classes of dynamics, encompassed by a unified framework* (director prof. dr. Octavian Păstrăvanu)
- FP7-PEOPLE-2007-1-1-ITN, no. 213841-2 / 2008 (-2012), *Deterministic and Stochastic Controlled Systems and Applications* (director prof. dr. Aurel Răşcanu, project manager dr. Eduard Rotenstein)

Bibliografie

[1] Apetrii, M.; Matcovschi, M.; Păstrăvanu, O.; Rotenstein, E., *Invariance for stochastic differential systems with time-dependent constraining sets*, Acta Math. Sin., English Series, Volume 31, Issue 7 (July), pp. 1171-1188, 2015.

[2] Barbu, V., *Optimal Control of Variational Inequalities*, Pitman Publishing INC, 1984.

[3] Bensoussan, A.; Răşcanu, A., *Stochastic variational inequalities in infinite-dimensional spaces*, Numer. Funct. Anal. Optim. 18, no. 1&2, pp. 19-54, 1997.

[4] Boufoussi, B.; van Casteren, J., *An approximation result for a nonlinear Neumann boundary value problem via BSDEs*, Stochastic Processes and their Applications, Volume 114, pp. 331-350, 2004.

[5] Brézis, H., *Opérateurs Maximaux Monotones et Semi-Groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert*, North-Holland, Amsterdam, 1973.

[6] Confortola, F.; Fuhrman, M.; Jacod, J., *Backward stochastic differential equations driven by a marked point process: an elementary approach, with an application to optimal control*, Annals of Applied Probability. Vol. 26, Number 3. pp. 1743-1773, 2016.

[7] Crudu, A.; Debussche, A.; Muller, A.; Radulescu, O., *Convergence of stochastic gene networks to hybrid piecewise deterministic processes*, Ann. Appl. Probab. 10(5), 1822–1859, 2012.

[8] Crudu, A.; Debussche, A.; Radulescu, O., *Hybrid stochastic simplifications for multiscale gene networks*, BMC Syst. Biol. 89, 3, 2009.

[9] Gassous, A.; Răşcanu, A.; Rotenstein, E., *Stochastic variational inequalities with oblique subgradients*, Stochastic Process. Appl., Volume 122, Issue 7, 2668–2700, 2012.

[10] Gassous, A.; Răşcanu, A.; Rotenstein, E., *Multivalued BSDEs with oblique subgradients*, Stoch. Process. Appl., Volume 125, Issue 8 (August), pp. 3170–3195, 2015.

[11] Goreac, D; Grosu, C.; Rotenstein, E., *Approximate and approximate null-controllability of a class of piecewise linear Markov switch systems,* Syst. & Control Lett., Volume 96 (October), pp. 118-123, 2016.

[12] Goreac, D.; Rotenstein, E., *Infection Time in Multistable Gene Networks. A Backward Stochastic Variational Inequality with Nonconvex Switch-Dependent Reflection Approach*, Set-Valued Var. Anal., Volume 24(4), pp. 707-734, 2016.

[13] Jakubowski, A., *A non-Skorokhod topology on the Skorokhod space*, Electron. J. Probab. 2 (4), pp. 1-21, 1997.

[14] Krishna, S. ; Banerjee, B.; Ramakrishnan, T. V.; Shivashankar, G. V., *Stochastic simulations of the origins and implications of long-tailed distributions in gene expression*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 102(13):4771–4776, 2005.

[15] LeJay, A., *BSDE driven by Dirichlet process and semi-linear parabolic PDE. Application to homogenization*, Stochastic Processes and Their Applications (1), pp. 1-39, 2002.

[16] Maticiuc, L.; Rotenstein, E., *Numerical Schemes for Multivalued Backward Stochastic Differential System,* Cent. Eur. J. Math. (current name Open Math.), 10(2), pp. 693-702, 2012.

[17] Maticiuc, L.; Rotenstein, E., *Anticipated backward stochastic variational inequalities with generalized reflection*, Stoch. Dyn., Vol. 18, No. 2, article ID: 1850008, pages: 1-21, 2018.

[18] Peng, S.; Yang, Z., *Anticipated backward stochastic differential equations*, The Annals of Probability, vol. 37, no. 3, pp. 877–902, 2009.

[19] Răşcanu, A.; Rotenstein. E., *The Fitzpatrick function - a bridge between convex analysis and multivalued stochastic differential equations*, J. Convex Anal., no. 18, no. 1, pp. 105-138, 2011.

[20] Răşcanu, A.; Rotenstein, E., *A non-convex setup for multivalued differential equations driven by oblique subgradients*, Nonlinear Anal.-Theor., Volume 111 (December), pp. 82-104, 2014.

[21] Răşcanu, A.; Rotenstein, E., *Obstacle problems for parabolic SDEs with Hölder continuous diffusion: from weak to strong solutions*, J. Math. Anal. Appl., Volume 450, Issue 1 (June, 1), pp. 647–669, 2017.

[22] Rotenstein, E., *A multi-dimensional FBSDE with quadratic generator and its applications in option pricing and hedging*, An.St. Univ. Ovidius Constanţa, Vol. 23(2), pp. 213-222, 2015.

[23] Rotenstein, E., *Parabolic variational inequalities with generalized reflecting directions*, Open Math. (formely Cent. Eur. J. Math.) 13, pp. 860–867, 2015.

[24] Skorohod, A., *Stochastic equations for diffusion processes in a bounded region*, Veroyatnost. i Primenen. no. 6, pp. 264-274, 1961; no. 7, pp. 3-23, 1962.

[25] Tanaka, H., *Stochastic Differential Equations with Reflecting Boundary Condition in Convex Regions*, Hiroshima Math. J., pp. 163-177, 1979.