ACADEMIA ROMÂNĂ
SCOSAAR

REZUMATUL TEZEI DE ABILITARE

TITLUL Truncated theta series, partition-theoretic interpretations and Rogers-Ramanujan type identities

Domeniul de abilitare: Matematică

Autor: MERCA MIRCEA

Această teză de abilitare este dedicată studiului seriilor theta trunchiate, inegalităților şi identităţilor liniare care implică funcţii de partiţii, precum şi al studiului unor identităţi de tip Rogers-Ramanujan. Teza se bazează pe o mare parte dintre rezultatele pe care le-am obţinut singur sau împreună cu colaboratorii mei în perioada care a urmat obţinerii doctoratului.

Aceste rezultate au făcut obiectul de studiu a 32 de articole ştiinţifice (28 dintre acestea fiind indexate ISI) publicate în: *Annals of Combinatorics* [48], *Applicable Analysis and Discrete Mathematics* [42], *ARS Mathematica Contemporanea* [5], *Bulletin of the Australian Mathematical Society* [36], *Carpathian Journal of Mathematics* [27], *Contributions to Discrete Mathematics* [45], *Experimental Mathematics* [33, 34], *International Journal of Number Theory* [8, 49], *Journal of Combinatorial Theory Series A* [2, 9], *Journal of Number Theory* [26, 29] *Journal of Ramanujan Society of Mathematics and Mathematical Sciences* [32], *Mediterranean Journal of Mathematics* [31, 38], *Periodica Mathematica Hungarica* [30, 40], *Quaestiones Mathematicae* [37], *Ramanujan Journal* [4, 6, 28, 39, 41, 44, 46, 47], *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas* [35], *Séminaire Lotharingien de Combinatoire* [7], *Transient Transcendence Transylvania – Transcendence in Algebra, Combinatorics, Geometry and Number Theory - TRANS19, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics* [20, 43].

Chiar dacă Leibniz este printre primii care au investigat numărul de moduri în care se poate reprezenta un număr întreg pozitiv ca sumă de numere întregi pozitive, bazele teoriei partiţiilor au fost puse de către Euler la mijlocul secolului al XVIII-lea [13]. Studii asupra acestei probleme particulare au fost făcute pe larg în secolele trecute, atât analitic, cât şi combinatoric. Există, de asemenea, studii asupra variantelor funcţiei de partiţie, unde au fost impuse unele condiţii privind proprietăţile partiţiilor (de exemplu, numărul de părţi, parităţi etc.).

Inegalităţile liniare care implică $p(n)$, funcţia de partiţie a lui Euler, pot fi considerate un subiect aproape neexplorat înainte de anul 2011. Se pare că

$$p(n) - p(n-1) - p(n-2) \leqslant 0$$

este singura inegalitate luată în considerare înainte de 2011. În anul 2012, utilizând structuri arborescente binare am publicat în [24, 25] cel mai eficient algoritm pentru generarea partiţiilor lui n. Pentru a demonstra că acest algoritm este cel mai eficient, am avut nevoie de următoarea inegalite: pentru $n > 0$,

$$p(n) - p(n-1) - p(n-2) + p(n-5) \leqslant 0. \tag{1}$$

În septembrie 2011 l-am întrebat pe George E. Andrews despre această inegalitate şi mi-a spus că nu apare în literatura de specialitate. Aşa a început colaboarea mea cu George E. Andrews aupra seriilor theta trunchiate. Motivaţia acestei colaborări a fost dată de următoarea generalizare a inegalităţii (1):

$$(-1)^{k-1} \sum_{j=1-k}^{k} (-1)^j p\Big(n - \frac{3j^2 - j}{2}\Big) \geqslant 0.$$

Această generalizare a fost obţinută în [1] considerând următoarea formă trunchiată a teoremei numerelor pentagonale a lui Euler: pentru $k \geqslant 1$,

$$\frac{1}{(q;q)_\infty} \sum_{n=1-k}^{k} (-1)^n q^{n(3n-1)/2} = 1 + (-1)^{k-1} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{q^{\binom{k}{2}+(k+1)n}}{(q;q)_n} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Puterea acestei tehnici de a explora inegalităţi şi identităţi de partiţie depinde de posibilitatea de a adapta această relaţie pentru a demonstra alte rezultate. Acest rezultat a deschis un nou studiu asupra seriilor theta trunchiate, inspirând mai mulţi matematicieni să lucreze asupra seriilor theta pentru a obţine forme trunchiate: M. El Bachraoui [3], S. H. Chan, T. P. N. Ho and R. Mao [10], S. Chern [11, 12], V. J. W. Guo and J. Zeng [14], T. Y. He, K. Q. Ji and W. J. T. Zang [15], L. W. Kolitsch [16, 17, 18], L. W. Kolitsch and M. Burnette [19], J.-C. Liu and Z.-Y. Huang [21], R. Mao [22, 23], C. Wang and A. J. Yee [50, 51, 52], A. J. Yee [53].

Teorema trunchiată a numerelor pentagonale (2) a fost demonstrată analitic în [1]. Demonstraţia noastră se bazează pe funcţii generatoare. În 2015, Ae Ja Yee [53] a redemonstrat teorema noastră invocând argumente combinatorice. În Capitolul 2, oferim două demonstraţii noi ale teoremei trunchiate a numerelor pentagonale, o demonstraţie fiind analitică [2] iar cealaltă, este combinatorică [49]. Mai multe familii infinite de inegalităţi liniare care implică funcţia de partiţie a lui Euler $p(n)$ apar în studiul nostru ca interpretări combinatorice ale identităţilor cu serii theta trunchiate. Ne-am întrebat adesea dacă există o altă modalitate de a demonstra aceste inegalităţi. În ultima secţiune a Capitolului 2, oferim o metodă foarte generală pentru demonstrarea inegalităţilor liniare omogene care implică funcţia de partiţie $p(n)$. Aceasta este o metodă numerică care nu implică o serie theta şi conectează acest tip de inegalităţi liniare omogene cu problema Prouhet-Tarry-Escott [41].

În Capitolul 3, furnizăm interpretări combinatorice pentru formele trunchiate a două identităţi care implică două serii theta ale lui Gauss, rezolvând în acest mod o problemă propusă de către V. J. W. Guo and J. Zeng [14]. De asemenea, arătăm că aceste rezultate, împreună cu trunchierea noastră anterioară a teoremei numerelor pentagonale a lui Euler sunt, în esenţă, corolarii ale unei identităţi Rogers-Fine. Împreună cu Cristina Ballantine, Donny Passary şi Ae Ja Yee, am oferit demonstraţii pur combinatorii ale acestor rezultate [9]. În plus, luăm în considerare forme trunchiate pentru funcţiile de generare ale suprapartiţiilor lui n în părţi impare [48] şi partiţiile lui n în părţi distincte [44].

În anul 1944, Freeman Dyson a definit conceptul de *rank* a unei partiţii întregi şi a introdus fără definiţie termenul de *crank* a unei partiţii întregi. O definiție pentru crank care îndeplineşte proprietăţile enunţate pentru aceasta de Dyson a fost descoperită în anul 1988 de către George E. Andrews şi Frank G. Garvan. În Capitolul 2, introducem forme trunchiate pentru două identităţi cu serii theta care implică funcţiile de generare pentru partiţii cu rank nenegativ şi partiţii cu rank pozitiv. În Capitolul 3, introducem forme trunchiate pentru două identităţi cu serii theta care implică funcţiile de generare pentru partiţii cu crank negativ. Ca şi corolarii, derivăm noi familii infinite de inegalităţi liniare pentru funcţia de partiţie $p(n)$.

În Capitolul 4, considerăm funcţiile Rogers-Ramanujan şi pentru fiecare $S \in \{1, 2\}$ obţinem relaţii liniare recurente pentru numărul partiţiilor lui n în părţi congruente cu $\pm S$ mod 5. În acest context, îmbunătăţim o conjectură publicată în [1] şi demonstrată trei ani mai târziu, în mod independent, de către A. J. Yee [53] care a utilizat metode combinatorice şi de către R. Mao [22] care a utilizat funcţii theta. Interpretările combinatorii pentru această nouă conjectură ne conduc pentru fiecare $S \in \{1, 2, 3, 4\}$ la o familie infinită de inegalităţi liniare omogene pentru numărul partiţiilor lui n în părţi congruente cu $\pm S$ mod 5. Un număr de 20 de identităţi care implică funcţiile Rogers-Ramanujan au fost descoperite în [33] considerând identitatea produsului triplu a lui Jacobi şi identitatea produsului cvintuplu a lui Watson. Aceste identităţi descoperite experimental devin teoreme cu ajutorul demonstraţiilor prezentate în capitolul următor.

În Capitolul 5, enunţăm şi demonstrăm formule cu produse pentru mai multe funcţii generatoare pentru şiruri $(a_n)_{n\geq 0}$ care sunt definite de proprietatea că $Pa_n + b^2$ este un pătrat, unde P şi b sunt numere întregi. În mod special, demonstrăm identităţile cu funcţii Rogers-Ramanujan enumerate în Capitolul 4. Arătăm că, prin identitatea produsului triplu a lui Jacobi, toate aceste funcţii generatoare pot fi reduse la o combinaţie liniară de produse cu funcţii theta. Demonstraţia formulelor noastre constă în tranformarea acestor combinaţii liniare de produse theta într-un singur produs. Facem acest lucru în două moduri: (1) prin utilizarea teoriei funcţiilor modulare şi (2) prin aplicarea formulei lui Weierstraß pentru însumarea produselor theta [20].

În Capitolul 6 sunt considerate şase aplicaţii ale seriilor theta trunchiate. În prima secţiune investigăm suma părţilor distincte care apare de cel puţin două ori în partiţiile numărului n şi furnizăm interpretări combinatorice pentru aceste sume [49]. O conexiune cu submulţimile mulţimii $\{1, 2, \ldots, n\}$ este analizată în acest context. În a doua şi a cincea secţiune sunt investigate conexiuni între seriile theta trunchiate şi partiţiile în părţi distincte [36, 37]. Excludentul minim sau funcția mex pentru o muţime S de numere întregi pozitive este cel mai mic întreg pozitiv care nu este în S. În a treia secțiune, considerăm funcţia mex aplicată partiţiilor întregi şi oferim conexiuni cu serii theta trunchiate [7, 8]. Conexiuni între serii theta trunchiate şi partiţii în părţi care nu sunt congruente cu 0, ± 3 (mod 12) sunt investigate în secţiunea a patra [40]. În ultima secţiune, oferim conexiuni între serii theta trunchiate şi funcţii de partiţie care intervin în soluţia Baxter a modelului hard-hexagon [35].

Divizorii unui număr întreg au fost mult timp studiaţi şi stau la baza unor probleme nerezolvate din teoria numerelor şi domeniile conexe. Studiul partiţiilor unui număr întreg este mult mai recent şi a fost continuat cu mare interes încă din timpul lui Euler, care este considerat a fi fondatorul acestei teorii. Istoria ambelor subiecte este bogată, interesantă şi foarte atrăgătoare. Cele două ramuri ale teoriei numerelor, aditivă şi multiplicativă, se dovedesc a fi legate în multe moduri interesante [28, 31, 38]. O parte din fascinaţia acestor ramuri ale teoriei numerelor rezidă în rezultate neaşteptate, inclusiv conexiuni între concepte care par să nu aibă legătură. În Capitolul 7, investigăm noi conexiuni între serii theta trunchiate şi seria Lambert luând în considerare noi variante ale teoremelor de factorizare a seriei Lambert [47].

Capitolul 8 conţine planuri şi direcţii pentru cercetări viitoare.

Bibliography

[1] G. E. Andrews and M. Merca. The truncated pentagonal number theorem. *J. Combin. Theory Ser. A*, **119**:1639–1643, 2012. ii, iii

[2] G. E. Andrews and M. Merca. Truncated theta series and a problem of Guo and Zeng. *J. Combin. Theory Ser. A*, **154**:610–619, 2018. i, ii

[3] M. El Bachraoui. Positive alternating sums of integer partitions. *Ramanujan J*, **55**:697–711, 2021. ii

[4] C. Ballantine and M. Merca. Parity of sums of partition numbers and squares in arithmetic progressions. *Ramanujan J*, **44**:617–630, 2017. i

[5] C. Ballantine and M. Merca. On identities of Watson type. *Ars Math. Contemp.*, **17**(1):277–290, 2019. i

[6] C. Ballantine and M. Merca. Bisected theta series, least r-gaps in partitions, and polygonal numbers. *Ramanujan J*, **53**:433–444, 2020. i

[7] C. Ballantine and M. Merca. The minimal excludant and colored partitions. *Sém. Lothar. Combin.*, **84B**:Article #23, 2020. i, iv

[8] C. Ballantine and M. Merca. Combinatorial proof of the minimal excludant theorem. *Int. J. Number Theory*, 2021, https://doi.org/10.1142/S1793042121500615. i, iv

[9] C. Ballantine, M. Merca, D. Passary, and A. J. Yee. Combinatorial proofs of two truncated theta series theorems. *J. Combin. Theory Ser. A*, **160**:168–185, 2018. i, iii

[10] S. H. Chan, T. P. N. Ho, and R. Mao. Truncated series from the quintuple product identity. *J. Number Theory*, **169**:420–438, 2016. ii

[11] S. Chern. Note on the truncated generalizations of Gauss' square exponent theorem. *Rocky Mountain J. Math.*, **48**(7):2211–2222, 2018. ii

[12] S. Chern. A further look at the truncated pentagonal number theorem. *Acta Arith.*, **189**:397–403, 2019. ii

[13] L. Euler. *Introduction to analysis of the infinite, Book I.* Translated by John D. Blanton. Springer-Verlag, New York, 1988. i

[14] V. J. W. Guo and J. Zeng. Two truncated identities of Gauss. *J. Combin. Theory Ser. A*, **120**:700–107, 2013. ii, iii

[15] T. Y. He, K. Q. Ji, and W. J. T. Zang. Bilateral truncated Jacobi's identity. *European J. Combin.*, **51**:255–267, 2016. ii

[16] L. W. Kolitsch. Another approach to the truncated pentagonal number theorem. *Int. J. Number Theory*, **11(5)**:1563–1570, 2015. ii

[17] L. W. Kolitsch. Truncated series from the quintuple product identity. *J. Number Theory*, **169**:420–438, 2016. ii

[18] L. W. Kolitsch. *Overpartitions and truncated partition identities.* In G. E. Andrews and F. Garvan (Editors) *Analytic Number Theory, Modular Forms and q-Hypergeometric Series*, pp. 393–400, Springer, Cham, 2017. ii

[19] L. W. Kolitsch and M. Burnette. Interpreting the truncated pentagonal number theorem using partition pairs. *Electron. J. Combin.*, **22(2)**:#P2.55, 2015. ii

[20] C. Krattenthaler, M. Merca, and C.-S. Radu. *Infinite product formulae for generating functions for sequences of squares.* In A. Bostan and K. Raschel (Editors), *Transient Transcendence Transylvania – Transcendence in Algebra, Combinatorics, Geometry and Number Theory - TRANS19, Brașov, Romania, May 13-17, 2019*, pp. 1-37, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, accepted, to appear. i, iv

[21] J.-C. Liu and Z.-Y. Huang. A truncated identity of Euler and related q-congruences. *Bull. Aust. Math. Soc.*, **102**(3):353–359, 2020. ii

[22] R. Mao. Proofs on two conjectures on truncated series. *J. Combin. Theory Ser. A*, **130**:15–25, 2015. ii, iii

[23] R. Mao. Some new expansions for certain truncated q-series. *Ramanujan J*, **46(2)**:475–481, 2018. ii

[24] M. Merca. Fast algorithm for generating ascending compositions. *J. Math. Model. Algorithms*, **11(1)**:89–104, 2012. i

[25] M. Merca. Binary diagrams for storing ascending compositions. *Comput. J.*, **56**(11):1320–1327, 2013. i

[26] M. Merca. Combinatorial interpretations of a recent convolution for the number of divisors of a positive integer. *J. Number Theory*, **160**:60–75, 2016. i

[27] M. Merca. A new look on the truncated pentagonal number theorem. *Carpathian J. Math.*, **32**:97–101, 2016. i

[28] M. Merca. The Lambert series factorization theorem. *Ramanujan J*, **44(2)**:417–435, 2017. i, iv

[29] M. Merca. New relations for the number of partitions with distinct even parts. *J. Number Theory*, **176**:1–12, 2017. i

[30] M. Merca. From a Rogers's identity to overpartitions. *Period. Math. Hungar.*, **75**:172–179, 2018. i

[31] M. Merca. New connections between functions from additive and multiplicative number theory. *Mediterr. J. Math.*, **15**:36, 2018. i, iv

[32] M. Merca. On a combinatorial interpretation of the bisectional pentagonal number theorem. *J. of Ramanujan Society of Mathematics and Mathematical Sciences*, **7(1)**:7–18, 2019. i

[33] M. Merca. Truncated theta series and Rogers–Ramanujan functions. *Exp. Math.*, 2019, https://doi.org/10.1080/10586458.2018.1542642. i, iii

[34] M. Merca. On two truncated quintuple series theorems. *Exp. Math.*, 2019, https://doi.org/10.1080/10586458.2019.1660742. i

[35] M. Merca. q-series congruences involving statistical mechanics partition functions in regime iii and iv of Baxter's solution of the hard-hexagonmodel. *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Math. RACSAM*, **114**:156, 2020. i, iv

[36] M. Merca. On the sum of parts in the partitions of n into distinct parts. *Bull. Aust. Math. Soc.*, 2020, https://doi.org/10.1017/S0004972720001422. i, iv

[37] M. Merca. On the partitions into distinct parts and odd parts. *Quaest. Math.*, 2020, https://doi.org/10.2989/16073606.2020.1769220. i, iv

[38] M. Merca. Generalized Lambert series and Euler's pentagonal number theorem. *Mediterr. J. Math.*, **18**:29, 2021. i, iv

[39] M. Merca. Polygonal numbers and Rogers–Ramanujan–Gordon theorem. *Ramanujan J*, **55**:783–792, 2021. i

[40] M. Merca. On the number of partitions into parts not congruent to $0, \pm 3 \pmod{12}$. *Period. Math. Hungar.*, 2021, https://doi.org/10.1007/s10998-020-00374-7. i, iv

[41] M. Merca. Linear inequalities concerning partitions into distinct parts. *Ramanujan J*, 2021, https://doi.org/10.1007/s11139-021-00427-6. i, iii

[42] M. Merca. Rank partition functions and truncated theta identities. *Appl. Anal. Discrete Math.*, 2021, https://doi.org/10.2298/AADM190401023M. i

[43] M. Merca. *A theta identity of Gauss connecting functions from additive and multiplicative number theory.* In A. Bostan and K. Raschel (Editors), *Transient Transcendence Transylvania – Transcendence in Algebra, Combinatorics, Geometry and Number Theory - TRANS19, Brașov, Romania, May 13-17, 2019*, pp. 1-37, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, accepted, to appear. i

[44] M. Merca and J. Katriel. A general method for proving the non-trivial linear homogeneous partition inequalities. *Ramanujan J*, **51**:245–266, 2020. i, iii

[45] M. Merca and M. D. Schmidt. Generating special arithmetic functions by Lambert series factorizations. *Contrib. Discrete Math.*, **14**(1):31–45, 2019. i

[46] M. Merca and M. D. Schmidt. The partition function $p(n)$ in terms of the classical Möbius function. *Ramanujan J*, **49**:87–96, 2019. i

[47] M. Merca and M. D. Schmidt. Factorization theorems for generalized Lambert series and applications. *Ramanujan J*, **51**(2):391–419, 2020. i, iv

[48] M. Merca, C. Wang, and A. J. Yee. A truncated theta identity of Gauss and overpartitions into odd parts. *Ann. Comb.*, **23**:907–915, 2019. i, iii

[49] M. Merca and A. J. Yee. On the sum of parts with multiplicity at least 2 in all the partitions of n. *Int. J. Number Theory*, **17(3)**:665–681, 2021. i, ii, iv

[50] C. Wang and A. J. Yee. Truncated Jacobi triple product series. *J. Combin. Theory Ser. A*, **166**:382–392, 2019. ii

[51] C. Wang and A. J. Yee. Truncated Hecke–Rogers type series. *Adv. Math.*, **365**, 2020. ii

[52] C. Wang and A. J. Yee. Truncated Hecke–Rogers type series—part II. *Ramanujan J*, 2021, https://doi.org/10.1007/s11139-021-00407-w. ii

[53] A. J. Yee. A truncated Jacobi triple product theorem. *J. Combin. Theory Ser. A*, **130**:1–14, 2015. ii, iii